

文章编号 1004-924X(2024)22-3336-12

应用垂直角特征的机器人与 2D 激光雷达手眼标定

刘 昶*, 罗 寅, 曲广宇

(沈阳理工大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110159)

摘要: 现有的机器人与 2D 激光雷达手眼标定方法中一般存在标定装置制造成本高、采样过程要求严格等缺点, 针对这些问题, 提出一种利用垂直角特征标定装置进行标定的方法。标定过程中保持标定装置与机器人基坐标系相对位置不变; 控制搭载 2D 激光雷达的机器人在某位姿下扫描标定装置, 雷达扫描平面与三个标定平面上形成三条直线特征, 利用它们之间存在的几何约束, 解算出雷达坐标系与标定坐标系间的变换关系; 通过变换机器人位姿重复扫描, 建立机器人工具坐标系与雷达坐标系间变换矩阵的约束方程; 求解约束方程得到变换矩阵的估计结果。同时提出一种基于平面特征的手眼标定优化算法, 该算法是一个三阶段迭代过程, 避免了垂直角特征制作精度对标定结果的不良影响。实验结果表明该方法在激光雷达扫描误差 2 mm 水平时, 通过 10 次迭代就可将旋转矩阵的欧拉角误差降到小于 0.01°、平移矩阵的距离误差小于 1.0 mm。相比同等标定条件下的其他方法在收敛速度上具有优势, 在初值选择上也更客观合理。

关键词: 机器人; 2D 激光雷达; 手眼标定; 角特征

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **doi:** 10.37188/OPE.20243222.3336

Hand-eye calibration between robot and 2D LiDAR using orthogonal corner feature

LIU Chang*, LUO Yin, QU Guangyu

(School of Information Science and Engineering, Shenyang Ligong University,
Shenyang 110159, China)

* Corresponding author, E-mail: syliuch@126.com

Abstract: Existing methods of hand-eye calibration between robot and 2D light detection and ranging (LiDAR) generally have shortcomings such as high cost of calibration instrument manufacture, strict requirement of sampling process, etc. To address these problems, a method using a calibration instrument with orthogonal corner feature was proposed. During the calibration process the calibration instrument was kept a fixed pose in robot base frame. When the robot mounted with the LiDAR was controlled to scan the calibration instrument, there are three intersection lines among the LiDAR's scanning plane and three calibration planes. Using the geometric constraints among three lines, the transformation between LiDAR and calibration frame was computed. From changing the robot pose and repeatedly scanning, a constraint equation with respect to the transformation matrix between LiDAR and robot end-effector frame was built. The transformation matrix estimation was acquired from solving the constraint equation. A hand-eye calibration optimization method based on planar features was also proposed. It is a three-stage iteration pro-

收稿日期: 2024-07-05; 修订日期: 2024-08-23.

基金项目: 辽宁省教育厅高等学校基本科研重点项目 (No. LJKZ0243)

cess. The optimization method avoids side effects from calibration instrument manufacture errors. The experimental results showed in the condition that the LiDAR scanning error was 2 mm, in 10 iterations the Euler angles error of the estimated rotation matrix was less than 0.01° , and the distance error of the translation vector was less than 1.0 mm. Comparing to another method under the same calibration conditions, the proposed method has an advantage in convergence speed, and is also more objective and reasonable in the choice of initial values.

Key words: robot; two dimensional light detection and ranging; hand-eye calibration; corner feature

1 引 言

近年来,机器人搭载 2D 激光雷达已被广泛应用于工业生产中的场景扫描、目标测量与定位、三维重建、表面缺陷检测等问题中,在这类应用中,“眼在手上(eye-in-hand)”是一种典型的安装方式,即激光雷达被固定在机器人末端,与机器人末端具有固定的位姿关系。通过机器人带动雷达进行深度扫描构建出场景的点云,但由于 2D 激光雷达采集到的深度信息都是相对于雷达自身坐标系的,为了构建统一坐标系(如机器人的基坐标系)下的目标点云,需要对雷达坐标系与机器人末端坐标系(如工具坐标系)间的坐标变换关系进行标定,即机器人与 2D 激光雷达的手眼标定^[1]。

针对手眼标定,目前研究较为成熟的是机器人搭载相机时的手眼标定求解。常用的方法是利用一块平面的棋盘格标定板,通过机器人带动相机在两个不同位姿下拍摄标定板图像,提取特征后建立机器人工具坐标系与相机坐标系间变换矩阵的一组约束方程,这种方程具有 $AX=XB$ 的形式,反复移动机器人带动相机以不同位姿拍摄标定板图像,构造多组约束方程即可求得较为可靠的手眼标定结果,这种方法数据采集量相对少,方程求解算法也比较成熟,如典型的 TSAI 方法(Tsai-Lenz Algorithm)等^[2-3]。但对于 2D 激光雷达的手眼标定问题,由于雷达每次扫描仅能获得 2D 扫描平面上的深度信息,不易确定当前位姿下的雷达坐标系与标定坐标系间的变换矩阵,因此以上思路在应用时存在困难。目前针对 2D 激光雷达的手眼标定方法主要有三种思路:一是利用高精度的测量设备,如激光跟踪仪、三坐标机等辅助测量,但这种方法不但需要较为昂贵的测量设备,而且也不适合

现场标定的场合;二是利用相机间接标定,即通过完成机器人与相机的手眼标定^[2]、相机与雷达的外参标定^[4-5]后计算实现,虽然两个标定过程都有相对成熟的方法,但由于引进了额外的设备,标定过程相对复杂,相机内参标定误差、相机手眼标定误差、雷达外参标定误差都会对最终的计算结果精度产生影响;三是利用特殊设计的标定装置,直接进行 2D 激光雷达的手眼标定,这类方法也是近年来实际应用中采用最多的方法。

REN 等^[6]、YIN 等^[7]、XIE 等^[8]、XU 等^[9]、经小龙等^[10]都采用了以已知直径的标准球作为标定物的标定方法,利用雷达扫描球表面时形成圆的特性,首先在雷达坐标系下拟合圆,利用已知的球半径,计算出球心坐标,再引入主动视觉的思想,在保持雷达姿态不变的情况下控制机器人沿直线运动,估计出手、眼坐标系间的旋转和平移,这种方法每次扫描仅能获得一个球心点特征的坐标,因此需要多次扫描;另外大尺寸的标准球在制作上存在困难、成本高,因此这种标定方法一般适用于较近距离的测量问题。CHEN 等^[11]提出基于圆盘的标定方法,控制雷达在保持姿态不变的条件下沿直线运动,利用雷达扫描到圆盘表面时的扫描线边缘构成椭圆的特性,通过椭圆拟合获得椭圆中心及圆盘的法向量的方法进行标定。相比于基于标准球的方法,圆盘标定物更简单,这种方法也能多提供一个方向约束,但仍存在需要多次扫描的问题;另外受 2D 激光雷达角分辨率有限的影响,利用扫描数据提取目标的边缘点容易引进误差。为了降低标定物的复杂度,CARLSON 等^[12]提出了基于多个平面的标定方法;SHARIFZADEH 等^[13]的研究进一步表明,利用一个标定平面也能实现标定,该方法利用平面上的扫描线共面的约束对坐标变换的旋转矩阵和平移向量进行迭代求解,但迭代的初值不易

确定;另外仿真研究表明该方法在某些情况下存在求解失败的情况,解的存在性还缺乏理论保证。高金锋等^[14]提出利用标准圆柱的标定方法,利用雷达扫描圆柱表面时形成椭圆的原理,通过椭圆拟合获得圆柱轴上的一个点,再利用多次扫描得到的点共线的原理,通过优化方法求解。该方法实际上是利用了圆柱轴的直线特征进行标定,缺点是将标定问题转化成一个有约束的优化问题,优化求解过程复杂。XU等^[15]提出基于直线特征的方法,利用直尺、刀片等常见物品作为标定物,通过扫描获取边缘点后提取边缘直线特征,在标定过程中也引入主动视觉的思想,需要在机器人运动过程中保持雷达姿态不变,由于每次扫描只能利用扫描数据获取一个边缘点的坐标,因此也存在边缘点特征提取误差受雷达角分辨率影响大,标定过程扫描次数多等缺点。LI等^[16]提出基于三维重建思想的标定方法,这种方法虽然充分利用了标定物的全局特征,但需要点云配准过程,构造的优化目标函数不易计算梯度,总体计算量大。从目前的研究结果看,现有的机器人与2D激光雷达的手眼标定方法大多存在大尺寸标定装置制造成本高、采样过程要求严格、计算量大等问题,特别是在测量目标与2D激光雷达距离较远的场合,还没有被人们普遍认可的通用方法。

本文提出一种采用垂直角特征标定装置进行2D激光雷达手眼标定的方法,这种角特征由三个相互正交的平面构成,标定装置容易制造,当雷达扫描该标定装置时,扫描平面与三个特征平面相交形成三条直线,通过这三条直线间存在的几何约束,解算出雷达坐标系与标定坐标系间的变换关系,从而建立坐标变换矩阵间的 $AX=XB$ 形式的约束方程,通过求解方程获得标定结果;以该结果为初值,采用提出的基于平面特征的迭代算法对标定结果进行优化,可进一步提高标定精度。

2 手眼标定原理

2.1 垂直角特征及其几何特征

本文采用具有垂直角特征的标定装置进行2D激光雷达的手眼标定。所谓的垂直角特征由

三条具有公共起点且相互正交的射线构成,该公共起点为角特征的顶点,由任意两条射线构成的平面是角特征的一个侧面,三个侧面也相互正交,如墙角、长方体的一个顶角等都是典型的垂直角特征。利用垂直角特征标定装置建立标定坐标系 $O_w\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$,如图1所示,定义角特征的顶点 O_w 为坐标原点,三条射线分别为 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ 轴。当2D激光雷达扫描到装置时,扫描平面与三个角特征的侧面 π_1,π_2,π_3 相交形成三条扫描直线,分别记为 L_1,L_2,L_3 ,记扫描平面与 \tilde{x} 轴和 \tilde{y} 轴的交点分别为 P_1 和 P_2 , L_2 与 L_3 的交点为 P_3 ,则它们之间存在以下几何性质:

性质1: P_3 必位于 \tilde{z} 轴上。

证明:如图1所示,由于 L_2 和 L_3 分别位于 $O_w\tilde{x}\tilde{z}$ 和 $O_w\tilde{y}\tilde{z}$ 平面上,则 L_2 和 L_3 的交点 P_3 必位于平面 $O_w\tilde{x}\tilde{z}$ 和 $O_w\tilde{y}\tilde{z}$ 的交线上,即为 \tilde{z} 轴。证毕。

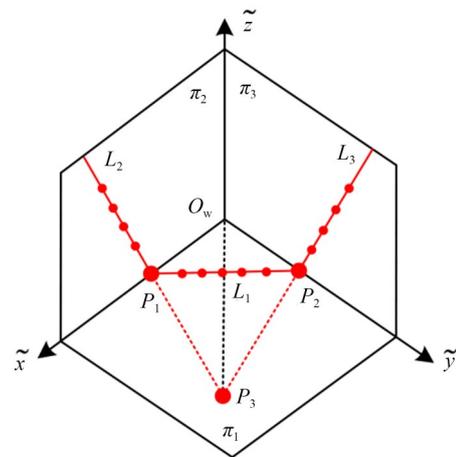


图1 雷达扫描垂直角特征时形成的三条直线

Fig. 1 Illustration of three scanning lines on the orthogonal corner feature

性质2: O_w 到扫描平面 $P_1P_2P_3$ 的垂直投影点是三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 的垂心。

证明:如图2所示,过 O_w 作扫描平面 $P_1P_2P_3$ 的垂线,垂足为 S 。由 $O_wS \perp \Delta P_1P_2P_3$ 有 $O_wS \perp P_1P_3$;由 $O_wP_2 \perp O_w\tilde{x}\tilde{z}$ 有 $O_wP_2 \perp P_1P_3$,可得 $P_1P_3 \perp O_wSP_2$,于是 $P_1P_3 \perp SP_2$;同理可得 $P_2P_3 \perp SP_1$,因此 S 是三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 的垂心。证毕。

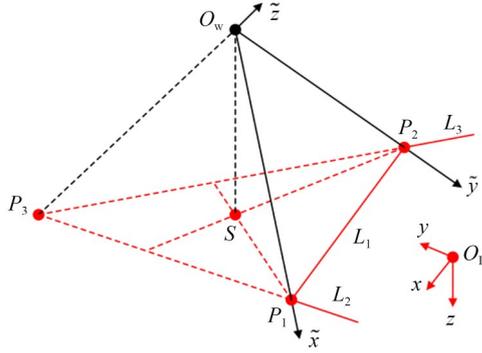


图 2 扫描线的几何特性

Fig. 2 Geometric properties of the scanning lines

2.2 雷达坐标系与标定坐标系的变换

记 2D 激光雷达的光心为 O_L , 取 O_L 为雷达坐标系原点, 雷达扫描的 0° 角方向为 x 轴, 90° 扫描

$$\begin{cases} x_w = \frac{(x_1(x_3 - x_2) + y_1(y_3 - y_2))(y_3 - y_1) - (x_2(x_3 - x_1) + y_2(y_3 - y_1))(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)} \\ y_w = y_1 - \frac{(x_w - x_1)(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2} \end{cases} \quad (3)$$

再由 $O_w P_1 \perp O_w P_2$, 有:

$$(x_1 - x_w)(x_2 - x_w) + (y_1 - y_w)(y_2 - y_w) + z_w^2 = 0. \quad (4)$$

根据式(3)和式(4)解出 z_w 的值为

$$z_w = \pm \sqrt{(x_w - x_1)(x_2 - x_w) + (y_w - y_1)(y_2 - y_w)}. \quad (5)$$

可见 z_w 的两个可能解关于雷达扫描平面对称, 利用 O_w 与雷达扫描平面的关系, 容易判定出 z_w 正确解的符号。以图 2 所示的两个坐标系间的相对关系为例, 雷达光心位于标定坐标系 $O_w \tilde{x}\tilde{y}$ 平面的 \tilde{z} 正方向一侧, 计算 $O_L P_1 \times O_L P_2 = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1)^T$, $O_w S$ 的方向 $(0, 0, -z_w)$ 应与 $O_L P_1 \times O_L P_2$ 的方向相同, 即 z_w 的符号应与 $x_1 y_2 - x_2 y_1$ 的符号相反, 由此判定出 z_w 的正确解。以上过程说明, 利用激光雷达在垂直角特征三个侧面上的扫描线, 可获得标定坐标系原点 O_w 在雷达坐标系下坐标的唯一解。

设雷达坐标系与标定坐标系间的变换关系为:

方向为 y 轴, 再按右手法则生成三维雷达坐标系 $O_L -xyz$ 。利用扫描数据可以提取 L_1, L_2, L_3 三条直线的方程, 并求得 P_1, P_2, P_3 三点在雷达坐标系下的坐标, 分别记为 $P_i(x_i, y_i, 0)$ ($i=1, 2, 3$)。记 O_w 点在雷达坐标系下的坐标为 (x_w, y_w, z_w) , 则 S 点在雷达坐标系下的坐标为 $(x_w, y_w, 0)$ 。

由 $P_1 P_3 \perp S P_2$, 有:

$$(x_3 - x_1)(x_w - x_2) + (y_3 - y_1)(y_w - y_2) = 0. \quad (1)$$

由 $P_2 P_3 \perp S P_1$, 有:

$$(x_3 - x_2)(x_w - x_1) + (y_3 - y_2)(y_w - y_1) = 0. \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可解出 x_w 和 y_w 的值为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{w \rightarrow L} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{w \rightarrow L}, \quad (6)$$

其中: $\mathbf{R}_{w \rightarrow L}$ 和 $\mathbf{T}_{w \rightarrow L}$ 分别是坐标变换的旋转矩阵和平移向量。由于 O_w 是标定坐标系原点, 其坐标为 $(0, 0, 0)^T$, 将所求得的 O_w 点的雷达坐标系坐标代入式(6), 可得:

$$\mathbf{T}_{w \rightarrow L} = (x_w, y_w, z_w)^T, \quad (7)$$

其中: \tilde{x}, \tilde{y} 和 \tilde{z} 轴方向在雷达坐标系下的单位向量 n_x, n_y 和 n_z 分别为:

$$\mathbf{n}_x = \frac{O_w P_1}{\|O_w P_1\|}, \mathbf{n}_y = \frac{O_w P_2}{\|O_w P_2\|}, \mathbf{n}_z = -\frac{O_w P_3}{\|O_w P_3\|}. \quad (8)$$

则有:

$$\mathbf{R}_{w \rightarrow L} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z). \quad (9)$$

由此获得两个坐标系间的旋转矩阵。以上过程说明只需要利用 2D 激光雷达对具有垂直角特征的标定装置进行一次扫描, 就可以解算出雷达坐标系与标定坐标系间唯一的坐标变换关系。

2.3 手眼标定

应用垂直角特征的 2D 激光雷达手眼标定过程与本文第 1 节描述的相机的手眼标定的过程类似。如图 3 所示, 维持具有垂直角特征的标定装

置与机器人基坐标系的相对位姿不变,利用机器人带动激光雷达以两个不同位姿扫描标定装置。记 $M_{T \rightarrow B} = \begin{pmatrix} R_{T \rightarrow B} & T_{T \rightarrow B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示机器人末端工具坐标系与基坐标系间的变换矩阵,其中 $R_{T \rightarrow B}$ 和 $T_{T \rightarrow B}$ 是坐标变换的旋转矩阵和平移向量,可由机器人控制系统获得; $X_{L \rightarrow T} = \begin{pmatrix} R_{L \rightarrow T} & T_{L \rightarrow T} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示手眼标定所求的雷达坐标系与工具坐标系的变换矩阵,其中 $R_{L \rightarrow T}$ 和 $T_{L \rightarrow T} = (t_x, t_y, t_z)^T$ 是坐标变换的旋转矩阵和平移向量; $M_{W \rightarrow L} = \begin{pmatrix} R_{W \rightarrow L} & T_{W \rightarrow L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示标定坐标系与雷达坐标系间的变换矩阵,利用本文 2.2 节的方法求得。

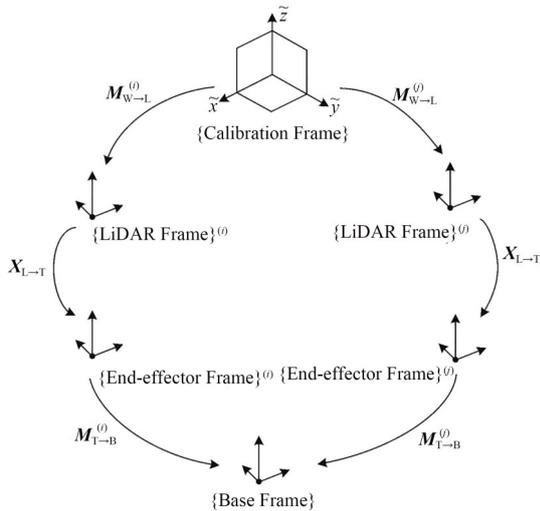


图 3 手眼标定原理示意图

Fig. 3 Illustration of the principle of hand-eye calibration

图 3 中 $M_{T \rightarrow B}^{(i)}$, $M_{W \rightarrow L}^{(i)}$ 和 $M_{L \rightarrow T}^{(j)}$, $M_{B \rightarrow T}^{(j)}$ 分别代表第 i, j 两个位姿时对应的变换矩阵。记 $A_{i,j} = (M_{T \rightarrow B}^{(j)})^{-1} M_{T \rightarrow B}^{(i)}$, $B_{i,j} = M_{W \rightarrow L}^{(j)} (M_{W \rightarrow L}^{(i)})^{-1}$, 有:

$$A_{i,j} X_{L \rightarrow T} = X_{L \rightarrow T} B_{i,j}, \quad (10)$$

式中, $A_{i,j}$ 和 $B_{i,j}$ 为已知量。式(10)构成关于 $X_{L \rightarrow T}$ 的一组约束方程,通过控制机器人带动雷达变换多个位姿对标定装置进行扫描,可得到多组形如式(10)的约束方程,进一步解出 $X_{L \rightarrow T}$ 的值。具体求解过程可采用现有的成熟方法^[2-3],这里不作赘述。

与现有方法相比,本文提出的手眼标定方法的优势在于仅利用 2D 激光雷达扫描一次标定装

置,即可获得雷达坐标系与标定坐标系间的变换关系,从而实现了 2D 激光雷达的手眼标定与相机手眼标定在问题转换和求解方法上的统一,也便于应用相机手眼标定的成熟技术;该方法现场采集激光雷达数据的工作量相对较少,采集过程中也无需保持雷达姿态、直线运动等特别要求。

3 角特征的变体

3.1 垂直外角特征

前面讨论的垂直角特征是一种内角特征,实际应用中也可以采用如图 4 所示的垂直外角特征。构建标定装置时,可制作由两个相互垂直的平面标定板构成的直角形标定装置,保证由两片标定板的底边构成的平面与两片标定板平面均垂直,再将直角形标定装置竖直放在一个尺寸稍大的平面上,构成外角垂直角特征。当雷达扫描标定装置时,在两片标定板上形成光条 L_2 和 L_3 ,同时在底平面上形成两段光条 $L_1^{(1)}$ 和 $L_1^{(2)}$,两段光条均在底平面与扫描平面的交线上,记为 L_1 。因此虽然扫描时形成四段直线,但实际上仍然是三条直线。这种垂直外角特征的几何性质也与前述的内角特征没有区别,可直接用于 2D 激光雷达手眼标定。

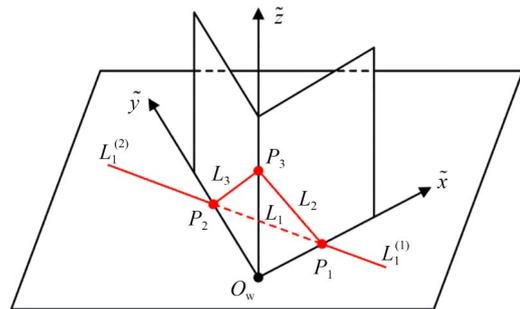


图 4 外角特征扫描线的几何特征特性

Fig. 4 Geometric properties of the scanning lines on an outer orthogonal corner feature

3.2 非垂直角特征

当构成角特征的三条射线的夹角不全是直角时,称其为非垂直角特征,这时标定坐标系仍可根据角特征定义,如仍定义顶点为坐标系原点 O_w ,以一条射线的方向为 \tilde{x} 轴方向,以 \tilde{x} 轴和另一条射线构成的平面的法线方向为 \tilde{z} 轴,再根据

右手法则定义 \tilde{y} 轴。

如图 5 所示,当雷达扫描到非垂直角特征时,记扫描平面与角特征的三条射线分别相交于 P_1, P_2, P_3 三点,这时 $O_w-P_1P_2P_3$ 构成一个以 $\Delta P_1P_2P_3$ 为底面、以 O_w 为顶点的三棱锥。该三棱锥的三个顶点为角特征对应直线的夹角,是已知量; P_1, P_2, P_3 的坐标通过雷达扫描数据经直线特征提取后计算得到,因此三点中任意两点间的距离也可以认为是已知量。这时,求标定坐标系与雷达坐标系的变换关系问题转化为一个三点定位问题(P3P, Perspective-Three-Point)。与垂直角特征的情况不同,理论上一般情况下 P3P 问题存在多组解,需要进一步验证才能得到真解^[17]。由此可见,若选择非垂直角特征进行手眼标定,不仅需要已知角特征三个顶角的准确值,而且解算过程中也不易获得坐标变换的准确值,因此非垂直角特征不适用于手眼标定。

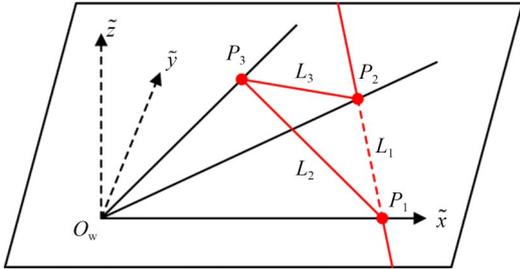


图 5 2D 激光雷达扫描非垂直角特征示意图

Fig. 5 Illustration of 2D LiDAR scanning a non-orthogonal corner feature

4 标定结果优化

根据方程(10)解出的手眼标定结果,是在分别确定了变换矩阵 $A_{i,j}$ 和 $B_{i,j}$ 的前提下获得的,而这些变换矩阵的求取仅利用了一次扫描的结果,再考虑到垂直角特征标定板的制作可能不够精确,这些因素容易导致误差的引进,因此标定结果有必要进一步优化,本文以第 2 节方法得到的估计结果作为初值,设计了一种三阶段迭代算法,利用所有扫描数据对标定结果进行优化。

4.1 标定平面法向量估计

扫描点在基坐标系下的坐标可表示为:

$$\hat{P}^{(k,j,i)} = R_{T \rightarrow B}^{(k)} (R_{L \rightarrow T} P^{(k,j,i)} + T_{L \rightarrow T}) + T_{T \rightarrow B}^{(k)} = R_{T \rightarrow B}^{(k)} T_{L \rightarrow T} + V^{(k,j,i)}, \quad (11)$$

其中: k 为扫描序号, $k=1,2,\dots,M$, M 为扫描总次数; j 表示平面序号, $j=1,2,3$; i 表示扫描点序号, $i=1,2,\dots,N_{k,j}$, $N_{k,j}$ 为第 k 次扫描在第 j 个平面上的扫描点数量; $P^{(k,j,i)}$ 是第 k 次扫描在第 j 个平面上的第 i 个扫描点的雷达坐标系坐标; $\hat{P}^{(k,j,i)}$ 是对应点的基坐标系坐标; $V^{(k,j,i)} = R_{T \rightarrow B}^{(k)} R_{L \rightarrow T} P^{(k,j,i)} + T_{T \rightarrow B}^{(k)}$ 。

以 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 表达点在基坐标系下的坐标,则第 j 个标定平面 π_j 在基坐标系下的方程可表示为:

$$\pi_j: \mathbf{n}_j^T (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T = 1, \quad (12)$$

式中, \mathbf{n}_j 为 π_j 的法向量。

在迭代的第一阶段,暂认为 $R_{L \rightarrow T}$ 和 $T_{L \rightarrow T}$ 估计值准确,固定 $R_{L \rightarrow T}$ 和 $T_{L \rightarrow T}$,以三个标定平面的法向量 $\mathbf{n}_j^T (j=1,2,3)$ 作为待估计参数。由于第 2 节的三条扫描线的提取过程中,已经能确定每个扫描点所属的标定平面,将对应点由公式(11)代入(12),有:

$$\mathbf{n}_j^T \hat{P}^{(k,j,i)} = 1. \quad (13)$$

记 $\mathbf{n}_j = (n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, n_3^{(j)})^T$, 公式(13)构成关于 \mathbf{n}_j 这些参数的线性约束。分别针对 $j=1,2,3$, 利用 M 次扫描中 j 平面上的所有扫描点,采用最小二乘法对 \mathbf{n}_j 进行估计,再计算 \mathbf{n}_j 的单位向量,记为 $\bar{\mathbf{n}}_j$ 。这时 π_j 平面方程可表示为:

$$\pi_j: \bar{\mathbf{n}}_j^T (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T = d_j, \quad (14)$$

式中, d_j 为基坐标系原点到 π_j 平面的距离,暂认为是未知量。

4.2 旋转矩阵估计

在迭代的第二阶段,固定标定平面的单位法向量 $\bar{\mathbf{n}}_j$, 将旋转矩阵 $R_{L \rightarrow T}$ 、平移向量 $T_{L \rightarrow T}$ 、基座标系原点到 π_j 平面的距离 d_j 作为待估参数。将 $R_{L \rightarrow T}$ 表示为:

$$R_{L \rightarrow T} = (\boldsymbol{\tau}_1 \quad \boldsymbol{\tau}_2 \quad \boldsymbol{\tau}_3) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

由于 $P^{(k,j,i)}$ 的 z 坐标均为 0, 式(11)可表示为:

$$\hat{P}^{(k,j,i)} = R_{T \rightarrow B}^{(k)} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{pmatrix} P^{(k,j,i)} + R_{T \rightarrow B}^{(k)} \begin{pmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{pmatrix} + T_{T \rightarrow B}^{(k)}. \quad (16)$$

将式(16)代入式(14), 整理后有:

$$\bar{n}_j^T R_{T \rightarrow B}^{(k)} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{pmatrix} P^{(k,j,i)} + \bar{n}_j^T R_{T \rightarrow B}^{(k)} \begin{pmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \end{pmatrix} - d_j = -\bar{n}_j^T T_{T \rightarrow B}^{(k)}. \quad (17)$$

记 $\Gamma = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{32}, t_X, t_Y, t_Z, d_1, d_2, d_3)$ 为待估参数向量, 式(17)构成关于 Γ 的线性约束, 利用全部扫描点, 再次利用最小二乘法求取 Γ 的估计值, 从而得到 $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{32})$ 的估计值, 进而得到 τ_1 和 τ_2 的估计值:

$$\tau_1 = \frac{(\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31})^T}{\|(\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31})\|}, \tau_2 = \frac{(\tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32})^T}{\|(\tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{32})\|}. \quad (18)$$

计算 $\tau_3 = \tau_1 \times \tau_2$, 得到 $R_{L \rightarrow T}$ 的初步估计值 $R_{L \rightarrow T} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, 由于该估计可能并非正交阵, 再采用 SVD 分解的方法将其转换为正交阵^[12], 作为 $R_{L \rightarrow T}$ 的最终估计。

以上过程同时得到 $d_j (j=1, 2, 3)$ 的估计值, 由式(14), 也得到 π_j 平面方程的进一步估计。

4.3 平移向量估计

在迭代的第三阶段, 固定旋转矩阵 $R_{L \rightarrow T}$ 和 3 个标定平面的方程 (即 \bar{n}_j 和 d_j), 估计平移向量 $T_{L \rightarrow T}$ 。将式(11)代入式(14), 有:

$$\bar{n}_j^T R_{T \rightarrow B}^{(k)} T_{L \rightarrow T} = d_j - \bar{n}_j^T V^{(k,j,i)}, \quad (19)$$

式中, $V^{(k,j,i)}$ 的值根据 4.2 节 $R_{L \rightarrow T}$ 的估计值计算, 为已知量。公式(19)构成关于 $T_{L \rightarrow T} = (t_X, t_Y, t_Z)^T$ 三个参数的线性约束, 再次利用全部扫描点, 应用最小二乘方法求取其估计值。

以上三阶段的优化过程可形成迭代, 每次迭代中包括 5 次最小二乘过程, 最小二乘的目标函数均为最小化样本点到对应平面的距离的平方和, 并没有要求 3 个标定平面互相垂直, 因此可避免由于标定装置制作误差导致的估计偏差。

4.4 手眼标定完整流程

基于垂直角特征的机器人与 2D 激光雷达手

眼标定的完整算法总结如下:

Step 1. $n := 0$; 由第 2 节的方法, 利用垂直角特征标定板进行手眼标定, 得到的旋转矩阵和平移向量标定结果分别为 $R_{L \rightarrow T}^{(n)}$ 和 $T_{L \rightarrow T}^{(n)}$;

Step 2. 固定 $R_{L \rightarrow T}^{(n)}$ 和 $T_{L \rightarrow T}^{(n)}$, 利用 4.1 节的方法估计三个标定平面的单位法向量, 记为 $\bar{n}_j^{(n+1)}$;

Step 3. 固定 $\bar{n}_j^{(n+1)}$, 利用 4.2 节的方法估计旋转矩阵, 记为 $R_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$; 同时估计基座坐标系原点到三个标定平面的距离, 记为 $d_j^{(n+1)}$;

Step 4. 固定 $R_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$ 和三个标定平面方程, 利用 4.3 节的方法估计平移向量, 记为 $T_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$;

Step 5. 若 $R_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$ 和 $T_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$ 满足精度要求或迭代次数达到预设的上限, 算法停止, 以 $R_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$ 和 $T_{L \rightarrow T}^{(n+1)}$ 作为标定结果; 否则 $n := n + 1$, 转 Step 2。

5 实验研究

5.1 仿真实验

为验证本文提出的手眼标定方法的有效性, 进行仿真实验, 实验中设 2D 激光雷达具有 0.0833° 的角分辨率, 雷达坐标系与工具坐标系间变换的旋转矩阵和平移向量的准确值分别为:

$$R_{L \rightarrow T}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T_{L \rightarrow T}^* = \begin{pmatrix} 110 \\ -160 \\ 130 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

根据垂直角特征标定板定义的标定坐标系与基座坐标系坐标变换的准确值为:

$$R_{W \rightarrow B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{W \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 2540 \\ 1590 \\ -930 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

其中, 式(20)和(21)中的平移向量均以 mm 为单位。

仿真时设定 M 组不同的机器人位姿对垂直角特征标定板进行扫描, 计算每组位姿下的扫描射线与三个标定平面的交点模拟雷达的扫描点, 以它们的雷达坐标系坐标作为扫描样本的准确值; 再设扫描射线在深度方向的误差服从均匀分布 $U[-\lambda, \lambda]$, 这里 λ 为干扰强度, 以叠加了误差的扫描样本点坐标参与标定计算。为了评价第 n 次迭代标定结果的精度, 旋转矩阵的误差 $E_R^{(n)}$ 采用欧拉角误差和的方法进行评价, 即:

$$E_R^{(n)} = |\varphi_X^{(n)} - \varphi_X^*| + |\varphi_Y^{(n)} - \varphi_Y^*| + |\varphi_Z^{(n)} - \varphi_Z^*|, \quad (22)$$

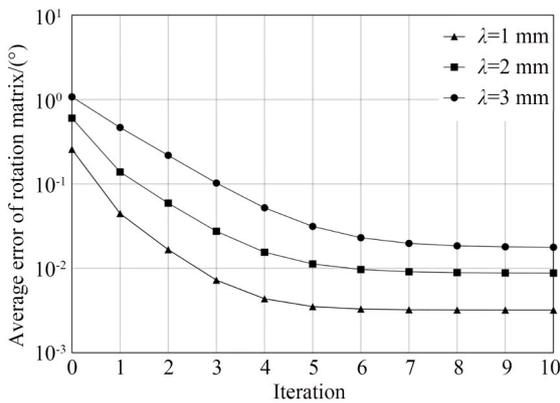
其中: $\varphi_x^{(n)}, \varphi_y^{(n)}, \varphi_z^{(n)}$ 分别是第 n 次迭代旋转矩阵估计值对应的 x, y, z 三个坐标轴的欧拉角, $\varphi_x^*, \varphi_y^*, \varphi_z^*$ 为对应的准确值。平移向量的误差 $E_T^{(n)}$ 采用距离法进行评价, 即:

$$E_T^{(n)} = \|T_{L \rightarrow T}^{(n)} - T_{L \rightarrow T}^*\| \quad (23)$$

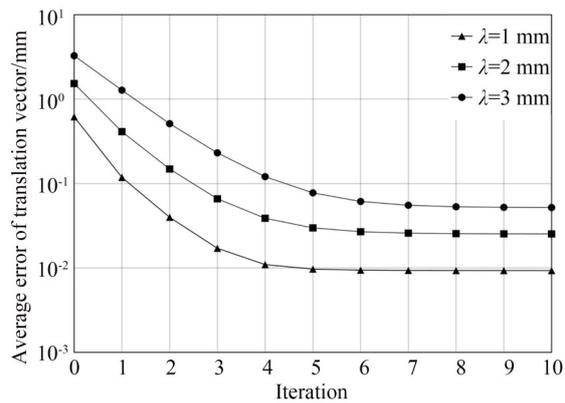
5.1.1 不同干扰强度下的收敛速度

分别设定干扰强度为 0, 1.0, 2.0, 3.0 mm, 除 0 mm 以外每个干扰强度下随机产生 100 组样本数据, 每组数据均包含 $M=50$ 种位姿下的扫描数据(每组数据中的 M 种位姿均相同), 采用本文方法, 共进行 10 次迭代, 计算迭代过程中每组样本的标定误差, 再统计 100 组样本的平均误差。当干扰强度为 0 mm 时, 利用垂直角特征计

算出的标定结果误差为 0, 说明本文提出的根据垂直角特征进行手眼标定的方法正确; 当干扰强度不为 0 时, 平均误差随迭代步数的变化曲线如图 6 所示。可见当存在干扰时, 直接经垂直角特征标定的结果出现了一定程度的误差, 且随干扰强度的增加而变大, 但在经本文的迭代方法优化后, 旋转矩阵的平均欧拉角误差均被控制到 0.1° 以下, 当干扰强度为 2.0 mm 时, 误差在 0.01° 以下, 平移向量的平均距离误差被控制到 1.0 mm 以下, 说明本文提出的优化方法能达到较好的精度; 从迭代过程看, 算法在 10 步以内就能接近稳定值, 说明该方法具有较快的收敛速度。



(a) 旋转矩阵的平均误差
(a) Average error of the rotation matrix



(b) 平移向量的平均误差
(b) Average error of the translation vector

图 6 不同干扰强度下的标定精度对比结果

Fig. 6 Comparison results of the calibration accuracy w. r. t. different noise level

5.1.2 位姿采样数量对标定精度的影响

固定干扰强度 $\lambda = 2.0$ mm, 从前述 $M = 50$ 种位姿中随机抽取 N 种, 分别产生扫描仿真样本, 通过 10 步迭代得到标定结果。重复以上抽取和计算过程 1 000 次并进行统计, 计算旋转矩阵和平移向量误差的平均值及标准差。选择不同的位姿数量 N 重复以上过程, 统计结果如表 1 所示, 其中 $\bar{E}_R^{(10)}$ 和 $\bar{E}_T^{(10)}$ 分别表示迭代 10 步后旋转矩阵和平移向量的误差均值, $\sigma_R^{(10)}$ 和 $\sigma_T^{(10)}$ 分别表示它们的标准差。由表 1 可见随着标定采样过程中位姿采样数量的增加, 最终的标定结果精度呈现出逐步提高的趋势; 当位姿采样数量达到 20~30 次时, 标定结果的平均误差和标准差已经能达到

表 1 采样次数对标定精度的影响

Tab. 1 Influence of sampling times on calibration accuracy

N	$\bar{E}_R^{(10)}/(^\circ)$	$\sigma_R^{(10)}/(^\circ)$	$\bar{E}_T^{(10)}/\text{mm}$	$\sigma_T^{(10)}/\text{mm}$
10	0.049	0.117	1.509	4.314
20	0.014	0.008	0.408	0.228
30	0.011	0.004	0.324	0.151
40	0.010	0.004	0.286	0.115
50	0.009	0.003	0.265	0.097

较低的水平, 这为真实标定过程中设定位姿采样数量提供了参考依据。

5.1.3 与现有方法的对比

本文第 4 节提出的优化方法本质上是一种基

于平面特征的手眼标定方法,与现有的基于球、圆盘、圆柱、直线等特征的方法不易直接进行比较,但采用本文方法获得扫描数据后,也可以采用文献[12]的方法进行手眼标定,以该方法作为对比方法,进行两种方法的对比实验。由于对比方法要求提供迭代的初值,实验中采用本文第2节方法得到的标定结果同时作为两种方法的初值。实验中设定干扰强度 $\lambda=2.0\text{ mm}$ 、位姿数量 $M=50$,分别采用两种方法各进行100次仿真,实验中计算机的CPU型号为i7-12700H,采用C++编程。

每次仿真两种方法各迭代1000步,表2给出最终优化结果的平均误差值,图7给出两种方法迭代过程中的平均误差对比情况。可见:两种方

法都能收敛;从最终的收敛结果看,本文方法的旋转误差和平移误差均略大于对比方法,但二者旋转的欧拉角平均误差仅相差 0.0017° ,平移向量的距离平均误差仅相差 0.073 mm ,差别均较小,可以认为两种方法在收敛精度上基本一致;从收敛所需的迭代次数上看,对比方法经300~350步迭代后,旋转误差达到 0.01° 以内,平移误差达到 1 mm 以内,相比本文方法需要更多的迭代次数。实验中也记录了两种方法的耗时情况,采用对比方法每次迭代的时间约为 58 ms ,采用本文方法为 76 ms ,虽然单次迭代花费的时间略长,但考虑到本文方法收敛所需迭代次数少,本文方法在收敛速度上仍然具有优越性,另外本文方法也解决了对比方法中不易确定初值的问题。

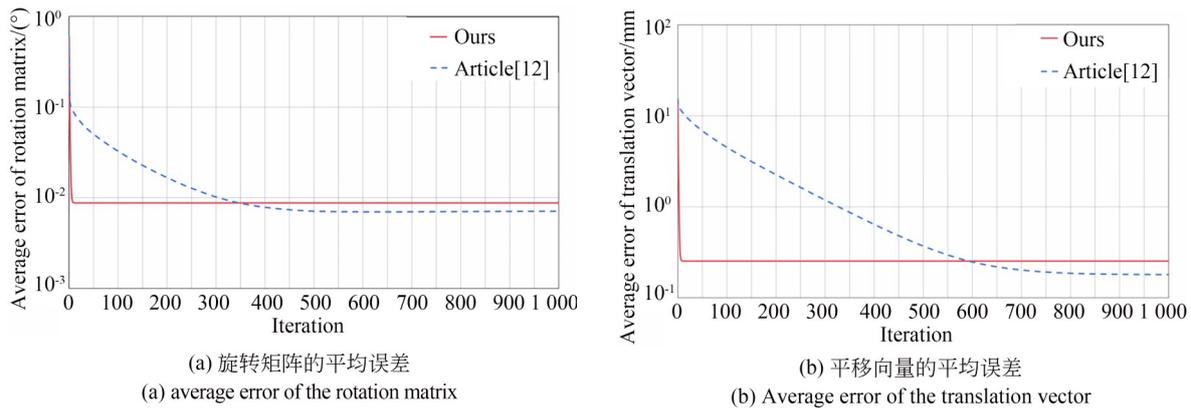


图7 两种方法的标定误差对比

Fig. 7 Comparison of the calibration errors of the two methods

表2 两种方法的迭代结果误差

Tab. 2 Errors of iteration results of two methods

迭代次数 n	本文方法		文献[12]方法	
	$E_R^{(n)}/(^\circ)$	$E_T^{(n)}/\text{mm}$	$E_R^{(n)}/(^\circ)$	$E_T^{(n)}/\text{mm}$
1 000	0.008 8	0.253	0.007 1	0.180

5.2 真实实验与应用

采用真实设备测试本文提出的手眼标定方法的实际效果,实验中机器人选用ABB公司的IRB 4600-60型六轴机器人;激光雷达采用SICK公司的LMS4121R-13000型号2D激光雷达,该激光雷达采用 660 nm 红色激光,具有 0.0833° 的角分辨率,扫描误差在 1.5 mm 以内;标定装置由三片 $420\text{ mm}\times 420\text{ mm}$ 的白色平板搭建的垂直

角特征构成,距离机器人基坐标系原点约 3 m 处,标定装置的外观如图8所示,图中也显示了某位姿下激光雷达扫描到3个标定平面时形成的光条的效果(彩图见期刊电子版)。

控制机器人变换 $M=50$ 种位姿带动激光雷达对标定装置进行扫描,共获取50组数据,利用其中的40组数据采用本文方法进行标定,共进行20次迭代,标定结果为:

$$\begin{cases} R_{L \rightarrow T}^{(20)} = \begin{pmatrix} 0.014 1 & 0.012 0 & 0.999 8 \\ 0.999 9 & -0.008 9 & -0.014 1 \\ 0.008 7 & 0.999 9 & -0.012 1 \end{pmatrix}, \\ T_{L \rightarrow T}^{(20)} = (117.95 \quad -150.09 \quad 139.18)^T \end{cases} \quad (24)$$

式中,平移向量的单位为 mm 。计算标定结果中

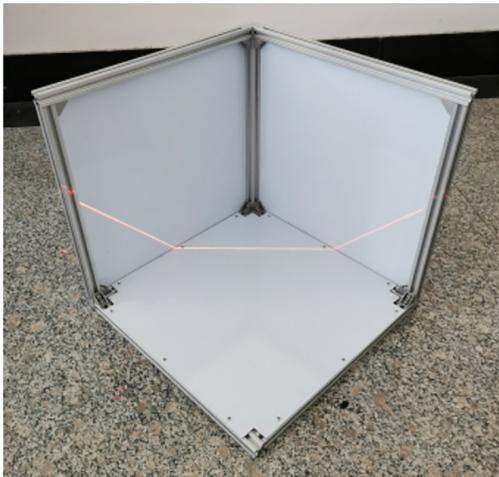


图 8 垂直角特征标定装置图像
Fig. 8 Orthogonal corner calibration device image

三个标定平面间的夹角,分别是 $89.51^\circ, 88.70^\circ, 89.59^\circ$, 可见受加工精度影响, 标定装置并非完全垂直的角特征, 若仅采用本文第 2 节方法进行标定, 将对标定结果产生不良影响。

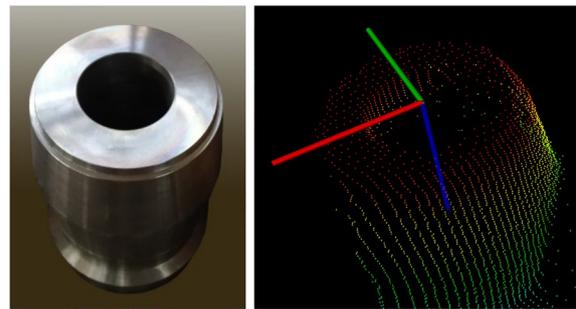
再通过另外 10 组数据进行效果测试, 利用式 (24) 的结果分别计算 10 组测试数据中每个激光扫描点到对应平面的有向距离误差, 并统计误差的分布, 结果如表 3 所示, 表中 E_d 和 σ_d 分别是有向误差的均值和标准差, $E_{|d|}$ 和 $\sigma_{|d|}$ 分别是对距离误差取绝对值后的均值和标准差, 可见平均误差在 1.5 mm 以内, 说明本文方法能达到较好的精度。

表 3 扫描点到平面的距离误差分布情况

Tab. 3 Distribution of the distance error between the scanned points and the plane

平面 序号	样本 点数	E_d/mm	σ_d/mm	$E_{ d }/\text{mm}$	$\sigma_{ d }/\text{mm}$
1	743	-0.63	1.38	1.19	0.93
2	900	-0.52	0.64	0.66	0.50
3	690	-0.64	1.41	1.35	0.82

将以上设备和标定结果应用于连铸钢包下水口定位系统, 利用机器人搭载 2D 激光雷达对下水口所在区域进行扫描, 下水口距离 2D 激光雷达约 2.5 m, 根据扫描结果对下水口底面中心点进行定位, 下水口的模型如图 9(a) 所示。控制机器人作直线运动, 速度为 80 mm/s, 运动中连



(a) 目标图像 (a) Object image
(b) 基座坐标系下的目标点云 (b) Object point cloud in base frame

图 9 目标图像及构建的目标点云

Fig. 9 Object image and its constructed point cloud

续采集 2D 激光雷达对下水口目标区域的扫描数据, 根据机器人的初始位姿和扫描数据的时间戳确定每帧扫描数据对应的机器人的实时位姿, 再根据前述的标定结果将激光雷达坐标系下的扫描点坐标转换到机器人基坐标系下, 构造出的目标点云如图 9(b) 所示。根据构造出的点云识别下水口底面中心点的位置, 为便于理解, 图 9(b) 中同时绘制了一个坐标系, 其三个坐标轴方向与机器人基坐标系的坐标轴方向相同, 其原点为识别得到的下水口底面中心点, 可见定位结果基本符合预期。

为进一步验证定位精度, 提前加工一个具有中心孔的圆片, 其厚度为 2 mm, 外径与下水口底面直径相同, 中心孔直径为 1 mm, 实验中首先将圆片置于下水口底面, 使其外缘与下水口底面外缘重合, 以圆片中心孔位置近似下水口底面中心点位置; 再利用示教器手工控制机器人, 将搭载在机器人上已标定的探针移动到圆片中心孔位置, 利用机器人本身的定位功能获取探针在基坐标系下的坐标, 作为下水口中心点坐标的准确值, 将其与根据点云定位的结果作对比。多次重复以上实验过程, 每次计算出的定位误差均小于 10 mm, 满足工程要求。

以上真实标定实验结果和应用说明本文标定方法可应用于实际。考虑到制造较大尺寸的垂直角特征标定装置较制造相当尺寸的标准球等标定装置更容易, 本文标定方法更适用于测量目标与 2D 激光雷达距离相对较远的应用场合。

6 结 论

本文针对机器人与 2D 激光雷达的手眼标定问题,提出一种应用垂直角特征标定装置的手眼标定方法,仅利用一次扫描,就可以获得雷达坐标系与标定坐标系间的坐标变换关系,将机器人与 2D 激光雷达的手眼标定问题转换为求解形如 $AX = XB$ 的方程问题,该形式方程的求解在机器人与相机的手眼标定问题中已经得到较好的解决,因此该方法实现了 2D 激光雷达的手眼标定与相机的手眼标定在问题转换和求解方法上的统一,在获取采样数据过程中对机器人的位姿没有特别要求,该方法为后续的优化算法提供了

合理的初值;进一步提出的基于平面特征的手眼标定优化算法通过迭代过程对标定结果进行优化,优化过程中仅利用了标定装置的平面特性,对标定平面间的垂直特性不作要求,避免了垂直角特征标定装置制作误差对标定结果的不良影响,可降低标定装置的制作成本。实验结果表明该方法在激光雷达扫描误差 2 mm 水平时,经过 10 次迭代后,欧拉角误差小于 0.01° 、平移矩阵的距离误差小于 1.0 mm,而同等标定条件下的现有方法需要 300~350 次迭代才能达到同样水平,说明本文方法在收敛速度上具有优势。本文的研究结果对应用机器人搭载 2D 激光雷达进行目标测量或定位等问题具有指导意义和参考价值。

参考文献:

- [1] 李文龙, 谢核, 尹周平, 等. 机器人加工几何误差建模研究: I 空间运动链与误差传递[J]. 机械工程学报, 2021, 57(7): 154-168.
LI W L, XIE H, YIN Z P, *et al.* The research of geometric error modeling of robotic machining: I spatial motion chain and error transmission[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(7): 154-168. (in Chinese)
- [2] TSAI R Y, LENZ R K. A new technique for fully autonomous and efficient 3D robotics hand/eye calibration[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, 5(3): 345-358.
- [3] ANDREFF N, HORAUD R, ESPIAU B. On-line Hand-Eye calibration [C]. *Second International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (Cat. No. PR00062)*. Ottawa, ON, Canada. IEEE, 2002: 430-436.
- [4] 黄志清, 苏毅, 王庆文, 等. 二维激光雷达与可见光相机外参标定方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(9): 121-129.
HUANG Z Q, SU Y, WANG Q W, *et al.* Research on extrinsic parameter calibration method of 2D laser rangefinder (LRF) and visible light camera [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2020, 41(9): 121-129. (in Chinese)
- [5] 彭梦, 陈白帆, 邓作杰, 等. 2D 激光雷达和摄像机最小解标定的多解筛选及参数优化[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(7): 89-97.
PENG M, CHEN B F, DENG Z J, *et al.* Multi so-
- lution selection and parameter optimization for minimum solution calibration of 2D laser radar and camera [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2021, 42(7): 89-97. (in Chinese)
- [6] REN Y J, YIN S B, ZHU J G. Calibration technology in application of robot-laser scanning system [J]. *Optical Engineering*, 2012, 51(11): 114204.
- [7] YIN S B, GUO Y, REN Y J, *et al.* A novel TCF calibration method for robotic visual measurement system[J]. *Optik*, 2014, 125(23): 6920-6925.
- [8] XIE H, PANG C T, LI W L, *et al.* Hand-Eye Calibration and Its Accuracy Analysis in Robotic Grinding[C]. 2015 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE). Gothenburg, Sweden. IEEE, 2015: 862-867.
- [9] XU X H, ZHU D H, ZHANG H Y, *et al.* TCP-based calibration in robot-assisted belt grinding of aero-engine blades using scanner measurements[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2017, 90(1): 635-647.
- [10] 经小龙, 胡源, 郭为忠. 臂载线结构激光手眼矩阵的精确标定: 多坐标系转换法[J]. 上海交通大学学报, 2020, 54(6): 607-614.
JING X L, HU Y, GUO W Z. High-accuracy calibration of hand-eye matrix of line-structured laser sensor: multiple coordinates transformation [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2020, 54(6): 607-614. (in Chinese)
- [11] CHEN W Y, DU J, XIONG W, *et al.* A noise-tolerant algorithm for robot-sensor calibration using a planar disk of arbitrary 3-D orientation[J]. *IEEE*

- Transactions on Automation Science and Engineering*, 2018, 15(1): 251-263.
- [12] CARLSON F B, JOHANSSON R, ROBERTSON A. Six DOF Eye-To-hand calibration from 2d measurements using planar constraints [C]. 2015 *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Hamburg, Germany. IEEE, 2015: 3628-3632.
- [13] SHARIFZADEH S, BIRO I, KINNELL P. Robust hand-eye calibration of 2D laser sensors using a single-plane calibration artefact[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2020, 61: 101823.
- [14] 高金锋, 梁冬泰, 陈叶凯. 基于标准圆柱的线激光轮廓扫描机器人手眼标定方法[J]. *机器人*, 2022, 44(3): 321-332.
GAO J F, LIANG D T, CHEN Y K. A hand-eye calibration method of line laser profile scanning robot based on standard cylinder[J]. *Robot*, 2022, 44(3): 321-332. (in Chinese)
- [15] XU J, HOO J L, DRITSAS S, *et al.* Hand-eye calibration for 2D laser profile scanners using straight edges of common objects[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2022, 73: 102221.
- [16] LI M Y, DU Z J, MA X X, *et al.* A robot hand-eye calibration method of line laser sensor based on 3D reconstruction[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2021, 71: 102136.
- [17] GAO X S, HOU X R, TANG J L, *et al.* Complete solution classification for the perspective-three-point problem [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(8): 930-943.

作者简介:



刘 昶(1971—),男,辽宁盘锦人,博士,教授,1992年和1995年于南开大学获学士和硕士学位,2012年于中国科学院沈阳自动化所获得博士学位,主要从事视觉测量理论及应用领域的研究。E-mail: syliuch@126.com



罗 寅(2000—),男,辽宁抚顺人,硕士研究生,2022年于长沙理工大学获得学士学位,主要从事视觉测量领域的研究。E-mail: 1372796647@qq.com